Épreuve de Mathématiques A

Durée 4h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précisions** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies.** En particulier les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leur calculs.

CONSIGNES :

— Composer lisiblement sur les copies avec un stylo à encre foncée : bleue ou noire

— L'usage de stylo à friction, stylo plume, liquide de correction et dérouleur de ruban correcteur est interdit.

— Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

— Le candidat rédigera sur trois copies qu'il intitulera :

- Mathématiques A-1 : Problème d'algèbre linéaire, Parties I.A) et I.B)
- Mathématiques A-2 : Problème d'algèbre linéaire, Partie II
- Mathématiques A-3 : Exercice de Probabilités

et rendra obligatoirement trois copies, même si certaines devaient être blanches, en mettant son numéro d'anonymat sur les trois copies.

$\boxed{\text{Partie I}}$ À rédiger <u>impérativement</u> sur une copie intitulée <u>Mathématiques A-I</u>

Si cette partie n'est pas abordée, le candidat rendra une copie blanche.

Pour tous entiers strictement positifs n, p, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients réels. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. I_n désigne la matrice identité d'ordre n. Pour une matrice A, $A^\top$ désigne sa matrice transposée

Partie I. A)

Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que la matrice A est diagonalisable.

2. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.

3. Déterminer une relation entre A^2, A et I_n.
   En déduire une relation entre A^{n+1}, A^n et A^{n-1} pour tout entier $n \geqslant 1$.

4. Montrer par récurrence qu'il existe deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \begin{pmatrix} u_n & v_n & v_n \\ v_n & u_n & v_n \\ v_n & v_n & u_n \end{pmatrix}$$

   qui vérifient la relation de récurrence

   $$\forall n \geqslant 1, \quad \begin{cases} u_{n+1} = u_n + 2u_{n-1} \\ v_{n+1} = v_n + 2v_{n-1} \end{cases}$$

5. Déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression de u_n et v_n en fonction de n.

Partie I. B)

Dans toute cette partie, on se fixe un entier $n \geqslant 1$. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On suppose qu'il existe deux matrices B, C de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et deux réels λ et μ tels que $\lambda\mu \neq 0$ et $\lambda \neq \mu$ vérifiant :

$$A = \lambda B + \mu C \tag{1}$$
$$A^2 = \lambda^2 B + \mu^2 C \tag{2}$$
$$A^3 = \lambda^3 B + \mu^3 C. \tag{3}$$

1. Exprimer B et C en fonction de A et A^2. En déduire que $A^3 = (\lambda+\mu)A^2 - \lambda\mu A$

2. Montrer que, pour tout entier $p \geqslant 1$, $A^p = \lambda^p B + \mu^p C$

3. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont A est la matrice dans la base canonique. On note $f^p = f \circ \cdots \circ f$ la $p^{\text{ième}}$ composée de f. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

   (a) Montrer que $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^p$.

   (b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda\mu f^{p-1}(x) = (\lambda+\mu) f^p(x) - f^{p+1}(x)$.

   (c) En déduire que $\operatorname{Ker} f^p \subset \operatorname{Ker} f$.

   (d) Montrer que $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^p)$.

$\boxed{\text{Partie II}}$ À rédiger <u>impérativement</u> sur une copie intitulée <u>Mathématiques A-II</u>

Si cette partie n'est pas abordée, le candidat rendra une copie blanche.

On se donne toujours un entier $n \geqslant 1$ fixé.

Soit U et V les matrices colonnes : $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \qquad V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$.

On suppose U et V non nulles. Soit a un réel et A la matrice définie par

$$A = aI_n + UV^\top.$$

1. Montrer que $V^\top U$ est un réel que l'on exprimera en fonction des coefficients u_i et v_i.

2. Montrer qu'il existe un réel k tel que $\left(UV^\top\right)^2 = k\left(UV^\top\right)$.
   En déduire qu'il existe deux réels α et β tels que $A^2 = \alpha A + \beta I_n$.

3. On note $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Donner l'expression de a_{ij} en fonction de a et des coefficients de U et V.
   En déduire que $\operatorname{Tr}(A) = na + V^\top U$.

4. Exprimer α et β en fonction de a et de $\operatorname{Tr}(A)$.

5. Soit λ une valeur propre de A. Montrer que λ^2 est une valeur propre de A^2.
   En déduire que λ vérifie l'équation
   $$\lambda^2 - \alpha\lambda - \beta = 0.$$

6. Montrer que les seules valeurs propres possibles de A sont
   $$\lambda_1 = a \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \operatorname{Tr}(A) - (n-1)\,a.$$

7. On suppose que $\operatorname{Tr}\left(UV^\top\right) \neq 0$ et on considère les sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 définis par
   $$E_i = \left\{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad AX = \lambda_i X\right\}.$$

   (a) Montrer que $E_1 \cap E_2 = \{0\}$.

   (b) Montrer par analyse-synthèse que, pour tout vecteur colonne X, il existe $X_1 \in E_1$ et $X_2 \in E_2$ tels que $X = X_1 + X_2$.

   (c) Montrer que la matrice A est diagonalisable.

8. Montrer que la matrice A de la première partie est de ce type.

Partie III , Exercice de Probabilités **À rédiger impérativement sur une copie intitulée Mathématiques A-III**

Si cette partie n'est pas abordée, le candidat rendra une copie blanche.

Exercice de Probabilités

On rappelle qu'une variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$ si

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = n) = p(1-p)^{n-1}.$$

1. Soit X une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre p.

   (a) Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X > n)$.

   (b) Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi de Bernoulli de paramètre p. On note T le rang du 1er succès obtenu : $T = \inf\{k \geqslant 1,\ X_k = 1\}$. Montrer que T a même loi que X.

2. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre p.

   (a) Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, $\mathbb{P}(X+Y=n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(X=k, Y=n-k)$

   (b) En déduire que pour tout $n \geqslant 2$, $\mathbb{P}(X+Y=n) = p^2(n-1)(1-p)^{n-2}$.

   (c) Déterminer, pour $n \geqslant 2$, la loi de X sachant $X+Y=n$.

3. On considère toujours X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre p. On pose $T = \max(X,Y)$ et $Z = \min(X,Y)$. On pose $q = 1-p$.

   (a) Montrer que $\mathbb{P}(X=Y) = \dfrac{p}{1+q}$.

   (b) i. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(Z=n) = \mathbb{P}(Z > n-1) - \mathbb{P}(Z > n)$

   ii. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(Z > n)$

   iii. Montrer que Z suit une loi géométrique de paramètre $1-q^2$

   (c) Déterminer la loi de T.

Corrigé

Partie I. A)

1. La matrice A est une matrice symétrique à coefficients réels, d'après le théorème spectral elle est donc orthogonalement diagonalisable : il existe une matrice orthogonale $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale réelle $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = P \times D \times P^\top$.
   Ainsi $\boxed{A \text{ est diagonalisable}}$.

2. Pour calculer le spectre de A nous calculons son polynôme caractéristique :

$$\begin{aligned}
\chi_A(X) &= \det\left(XI_3 - A\right) \\
&= \begin{vmatrix} X-1 & 1 & 1 \\ 1 & X-1 & 1 \\ 1 & 1 & X-1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} X+1 & 1 & 1 \\ X+1 & X-1 & 1 \\ X+1 & 1 & X-1 \end{vmatrix} \qquad C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 \\
&= \begin{vmatrix} X+1 & 1 & 1 \\ 0 & X-2 & 1 \\ 0 & 0 & X-2 \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix} \\
&= (X+1)(X-2)^2
\end{aligned}$$

Nous en déduisons que $\boxed{\text{le spectre de } A \text{ est } \{-1, 2\}}$ avec les multiplicités respectives : $m_{-1} = 1$ et $m_2 = 2$.

Pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, on a

$$\begin{aligned}
AX = -X \quad &\iff \quad \left\{\begin{array}{rcl} x - y - z &=& -x \\ -x + y - z &=& -y \\ -x - y + z &=& -z \end{array}\right. \\
&\iff \quad \left\{\begin{array}{rcl} 2x - y - z &=& 0 \\ -x + 2y - z &=& 0 \\ -x - y + 2z &=& 0 \end{array}\right. . \\
&\iff \quad \left\{\begin{array}{rcl} 2x - y - z &=& 0 \\ 3y - 3z &=& 0 \\ -3y + 3z &=& 0 \end{array}\right. \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1 \end{matrix} \\
&\iff \quad \left\{\begin{array}{rcl} x &=& z \\ y &=& z \end{array}\right. .
\end{aligned}$$

Ainsi on a $\boxed{E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$.

D'autre part la matrice A étant symétrique réelle avec deux sous espaces propres on a donc $E_2(A) = E_{-1}(A)^\perp$

On pose alors $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, puis $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ce vecteur est orthogonal à e_1 et non nul, puis $e_3 = e_1 \wedge e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

(e_2, e_3) est une famille libre et chaque vecteur est orthogonal à e_1 donc appartient à $E_2(A)$. De plus comme A est diagonalisable, $\dim(E_2(A)) = 2$ donc (e_2, e_3) est une base de $E_2(A)$.

Ainsi $\boxed{E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)}$.

3. On a

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ainsi $\boxed{A^2 = A + 2I_3}$.
Soit $n \geqslant 1$. Si nous multiplions l'identité $A^2 = A + 2I_3$ par A^{n-1} à gauche nous obtenons la relation

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \qquad A^{n+1} = A^n + 2A^{n-1}}$$

4. Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose

$$\mathcal{P}_n \quad : \quad \text{« } \exists (u_n, v_n) \in \mathbb{R}^2, \text{ avec } A^n = \begin{pmatrix} u_n & v_n & v_n \\ v_n & u_n & v_n \\ v_n & v_n & u_n \end{pmatrix} \text{ »}$$

Nous montrons que la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 0$ par récurrence double :

- Initialisation
  La relation $\mathcal{P}_0$ est vraie en prenant $u_0 = 1$ et $v_0 = 0$ puis $\mathcal{P}_1$ est vraie en prenant $u_1 = 1$, $v_1 = -1$.

- Hérédité
  Soit $n \geqslant 1$, on suppose que $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n-1}$ sont vraies.
  On a $A^{n+1} = A^n + 2A^{n-1}$ donc :

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} u_n & v_n & v_n \\ v_n & u_n & v_n \\ v_n & v_n & u_n \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} u_{n-1} & v_{n-1} & v_{n-1} \\ v_{n-1} & u_{n-1} & v_{n-1} \\ v_{n-1} & v_{n-1} & u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n + 2u_{n-1} & v_n + 2v_{n-1} & v_n + 2v_{n-1} \\ v_n + 2v_{n-1} & u_n + 2u_{n-1} & v_n + 2v_{n-1} \\ v_n + 2v_{n-1} & v_n + 2v_{n-1} & u_n + 2u_{n-1} \end{pmatrix}$$

  donc A^{n+1} est de la forme voulue en posant $u_{n+1} = u_n + 2u_{n-1}$ et $v_{n+1} = v_n + 2v_{n-1}$.
  d'où $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Ainsi, $\boxed{\text{on a démontré l'existence des suites } (u_n) \text{ et } (v_n) \text{ telles que}}$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \begin{pmatrix} u_n & v_n & v_n \\ v_n & u_n & v_n \\ v_n & v_n & u_n \end{pmatrix}}$$

$\boxed{\text{et qui vérifient la relation de récurrence.}}$

5. D'après la question 4. les suites u et v vérifient la même relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

L'équation caractéristique associée est $x^2 = x + 2$ de racines -1 et 2.
donc il existe quatre réels $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \alpha 2^n + \beta(-1)^n \text{ et } v_n = \gamma 2^n + \delta(-1)^n$$

La prise en compte des conditions initiales $u_0 = u_1 = 1$ permet de conclure que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \frac{1}{3}\left(2^{n+1} + (-1)^n\right)}$$

et la contrainte $v_0 = 0,\ v_1 = -1$ permet d'avoir :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_n = \frac{1}{3}\left((-1)^n - 2^n\right)}$$

Partie I. B)

1. On a $\left\{\begin{array}{l} A = \lambda B + \mu C \\ A^2 = \lambda^2 B + \mu^2 C \end{array}\right.$ donc $L_2 - \mu L_1$ donne $A^2 - \mu A = \lambda(\lambda - \mu)B$ et comme $\lambda \neq \mu$ et $\lambda \neq 0$, on a

$$\boxed{B = \frac{1}{\lambda\,(\lambda - \mu)}\left(A^2 - \mu A\right)}$$

De même avec $L_2 - \lambda L_1$ on a $A^2 - \lambda A = \mu(\mu - \lambda)C$ et comme $\mu \neq \lambda$ et $\mu \neq 0$, on a

$$\boxed{C = \frac{1}{\mu\,(\lambda - \mu)}\left(-A^2 + \lambda A\right)}$$

Comme enfin $A^3 = \lambda^3 B + \mu^3 C$, on a

$$A^3 = \frac{\lambda^2}{\lambda - \mu}\left(A^2 - \mu A\right) + \frac{\mu^2}{\lambda - \mu}\left(-A^2 + \lambda A\right) = \frac{\lambda^2 - \mu^2}{\lambda - \mu}A^2 + \frac{\lambda\mu^2 - \lambda^2\mu}{\lambda - \mu}A$$

puis

$$\boxed{A^3 = \frac{(\lambda - \mu)(\lambda + \mu)}{\lambda - \mu}A^2 + \frac{\lambda\mu(\mu - \lambda)}{\lambda - \mu}A = (\lambda + \mu)A^2 - \lambda\mu A}$$

2. On a vu que $A^3 = (\lambda + \mu)A^2 - \lambda\mu A$. En multipliant par A^{p-1} pour $p \geqslant 1$, on obtient

$$\forall p \geqslant 1, \qquad A^{p+2} = (\lambda + \mu)A^{p+1} - \lambda\mu A^p$$

Pour tout entier $p \geqslant 1$, on note

$$\mathcal{H}_p \quad : \quad \text{« } A^p = \lambda^p B + \mu^p C \text{ »}$$

Nous montrons que la propriété est vraie pour tout $p \geqslant 1$ par récurrence double :

- Initialisation

  Les relations $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ sont vraies car $A = \lambda B + \mu C$ et $A^2 = \lambda^2 B + \mu^2 C$

- Hérédité

  Soit $p \geqslant 1$, on suppose que $\mathcal{H}_p$ et $\mathcal{H}_{p+1}$ sont vraies.
  D'après ce qui précède, on a $A^{p+2} = (\lambda + \mu)A^{p+1} - \lambda\mu A^p$ et donc, en utilisant $\mathcal{H}_p$ et $\mathcal{H}_{p+1}$, on a :

  $$A^{p+2} = (\lambda + \mu)(\lambda^{p+1}B + \mu^{p+1}C) - \lambda\mu(\lambda^p B + \mu^p C)$$

  Puis

  $$A^{p+2} = (\lambda^{p+2} + \mu\lambda^{p+1} - \mu\lambda^{p+1})B + (\mu^{p+2} + \lambda\mu^{p+1} - \lambda\mu^{p+1})C = \lambda^{p+2}B + \mu^{p+2}C$$

  donc A^{p+2} est de la forme voulue et $\mathcal{H}_{p+2}$ est vraie.

Ainsi, par récurrence, $\boxed{\text{pour tout entier } p \geqslant 1,\ A^p = \lambda^p B + \mu^p C.}$

1. (a) Soit $x \in \text{Ker}(f)$, on a $f(x) = 0_{\mathbb{R}^n}$ donc , comme $p \geqslant 1$: $f^p(x) = f^{p-1}(f(x)) = f^{p-1}(0_{\mathbb{R}^n}) = 0_{\mathbb{R}^n}$.
Ainsi $x \in \text{Ker}\, f^p$. D'où

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^\star \qquad \text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^p)}$$

(b) D'après la question 2. on a, pour tout $p \geqslant 1$, $A^{p+2} = (\lambda+\mu)A^{p+1} - \lambda\mu A^p$.
donc pour $p \geqslant 2$, $A^{p+1} = (\lambda+\mu)A^p - \lambda\mu A^{p-1}$.
A est la matrice canoniquement associée à f donc, pour $k \in \mathbb{N}$, la matrice associée à f^k est A^k
Ainsi, pour tout $p \geqslant 2$, on a $f^{p+1} = (\lambda+\mu)f^p - \lambda\mu f^{p-1}$ et donc :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad \lambda\mu f^{p-1}(x) = (\lambda+\mu)\, f^p(x) - f^{p+1}(x)}$$

(c) On va procéder par récurrence double sur $p \in \mathbb{N}^*$
Notons, pour $p \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{A}(p)$: « $\text{Ker}(f^p) \subset \text{Ker}(f)$ ».

- Initialisation
  La propriété $\mathcal{A}(1)$ est trivialement vraie.

- Hérédité
  Soit $p \geqslant 2$, on suppose que $\mathcal{A}(p-1)$ est vraie.
  Soit $x \in \text{Ker}(f^p)$, i.e. $f^p(x) = 0_{\mathbb{R}^n}$, on a alors $f^{p+1}(x) = f(0_{\mathbb{R}^n}) = 0_{\mathbb{R}^n}$.
  Or, d'après la question précédente,

$$\lambda\mu f^{p-1}(x) = (\lambda+\mu)\, f^p(x) - f^{p+1}(x) = 0_{\mathbb{R}^n}$$

  Ainsi $\lambda\mu f^{p-1}(x) = 0_{\mathbb{R}^n}$ et comme $\lambda\mu \neq 0$, on a $f^{p-1}(x) = 0_{\mathbb{R}^n}$, i.e. $x \in \text{Ker}(f^{p-1})$.
  Or $\text{Ker}(f^{p-1}) \subset \text{Ker}(f)$, d'où $x \in \text{Ker}(f)$.

Ce qui prouve $\mathcal{A}(p)$ et achève la récurrence.
Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } p \geqslant 1,\ \text{Ker}(f^p) \subset \text{Ker}(f).}$

d. D'après les questions 3.(a) et 3.(c), on a, pour tout entier $p \geqslant 1$, $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^p)$.
Ainsi, pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$, $\dim(\text{Ker}(f)) = \dim(\text{Ker}(f^p))$ pour tout
D'après le théorème du rang on a alors

$$\text{Rg}(A^p) = \text{Rg}(f^p) = n - \dim(\text{Ker}(f^p)) = n - \dim(\text{Ker}(f)) = \text{Rg}(f) = \text{Rg}(A)$$

Ainsi

$$\boxed{\forall p \geqslant 1, \qquad \text{Rg}(A^p) = \text{Rg}(A)}$$

Partie II

1. En toute rigueur, le produit $V^\top U$ est un élément de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ qui peut être canoniquement identifié à $\mathbb{R}$.
Par produit matriciel on a alors

$$\boxed{V^\top U = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i}$$

2. On effectue le calcul matriciel en utilisant l'associativité de la multiplication, on a $UV^\top \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et

$$\left(UV^\top\right)^2 = (UV^\top)(UV^\top) = U\underbrace{(V^\top U)}_{=k\in\mathbb{R}}V^\top = \underbrace{(V^\top U)}_{=k\in\mathbb{R}}\times UV^\top = k(UV^\top)$$

On a $A = aI_n + UV^\top$. Comme I_n et $UV^\top$ commutent on a alors

$$A^2 = a^2 I_n^2 + 2aI_nUV^\top + \left(UV^\top\right)^2$$

D'où, en utilisant ce qui précède :

$$A^2 = a^2 I_n + 2aUV^\top + k \times UV^\top = a^2 I_n + (2a+k)(UV^\top)$$

or $UV^\top = A - aI_n$ donc

$$A^2 = a^2 I_n + (2a+k)(A - aI_n) = (-a^2 - ak)I_n + (2a+k)A$$

Ainsi

$$\boxed{A^2 = (\underbrace{2a+k}_{\alpha})A + (\underbrace{-a^2 - ka}_{\beta})I_n}$$

3. La matrice $M = UV^\top$ appartient à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et ses coefficients sont les $m_{i,j} = u_i v_j$ pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$.
On a $A = aI_n + M$ donc :

   - $\boxed{\text{Si } 1 \leqslant i \leqslant n,\ a_{i,i} = a + u_i v_i}$

   - $\boxed{\text{Si } 1 \leqslant i \leqslant n \text{ et } 1 \leqslant j \leqslant n \text{ avec } i \neq j,\ a_{i,j} = u_i v_j}$

   Ainsi $\operatorname{Tr}(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,i} = n \times a + \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$, et donc

$$\boxed{\operatorname{Tr}(A) = na + V^\top U = na + k}$$

4. On sait que $\operatorname{Tr}(A) = na + V^\top U = na + k$ donc $k = V^\top U = \operatorname{Tr}(A) - na$.
D'où

$$\alpha = 2a + k = 2a + \operatorname{Tr}(A) - na = (2-n)a + \operatorname{Tr}(A)$$

et

$$\beta = -a^2 - ka = -a^2 - a(\operatorname{Tr}(A) - na) = (n-1)a^2 - a \times \operatorname{Tr}(A)$$

Finalement

$$\boxed{\alpha = (2-n)a + \operatorname{Tr}(A), \qquad \text{et} \qquad \beta = (n-1)a^2 - a \times \operatorname{Tr}(A)}$$

5. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de A et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre associé On a donc

$$A^2X = A(AX) = A(\lambda X) = \lambda(AX) = \lambda(\lambda X) = \lambda^2 X$$

et comme X est un vecteur non nul on déduit que donc $\boxed{\lambda^2 \text{ est une valeur propre de } A^2}$.
On a $A^2 = \alpha A + \beta I_n$, d'où en multipliant par X à droite, $A^2X = \alpha AX + \beta X$. Comme $AX = \lambda X$ et $A^2.X = \lambda^2 X$, on en déduit que $\lambda^2 X = (\alpha\lambda + \beta)X$ et donc $\left(\lambda^2 - \alpha\lambda - \beta\right)X = 0$ Puisque X est un vecteur non nul, on obtient

$$\boxed{\lambda^2 - \alpha\lambda - \beta = 0}$$

6. L'équation $x^2 - \alpha x - \beta = 0$ se réecrit

$$x^2 - ((2-n)a + \mathrm{Tr}(A))x - (n-1)a^2 - a \times \mathrm{Tr}(A)$$

Son discriminant est

$$\begin{aligned}
\Delta &= \alpha^2 + 4\beta \\
&= (2-n)^2a^2 + (\mathrm{Tr}(A))^2 + 2(2-n)a \times \mathrm{Tr}(A) + 4(n-1)a^2 - 4a \times \mathrm{Tr}(A) \\
&= \left((n-2)^2 + 4(n-1)\right)a^2 + (\mathrm{Tr}(A))^2 + (4 - 2n - 4)a \times \mathrm{Tr}(A) \\
&= n^2a^2 + (\mathrm{Tr}(A))^2 - 2na \times \mathrm{Tr}(A) \\
&= (na - \mathrm{Tr}(A))^2
\end{aligned}$$

Ainsi les solutions de l'équation sont :
$x_1 = \dfrac{\alpha + na - \mathrm{Tr}(A)}{2} = \dfrac{(2-n)a + \mathrm{Tr}(A) + na - \mathrm{Tr}(A)}{2} = a$
et $x_2 = \dfrac{\alpha - (na - \mathrm{Tr}(A))}{2} = \dfrac{(2-n)a + \mathrm{Tr}(A) - na + \mathrm{Tr}(A)}{2} = (1-n)a + \mathrm{Tr}(A)$
Comme toute valeur propre de A vérifie l'équation (question 5.) on en déduit que

$\boxed{\text{les valeurs propres possibles de } A \text{ sont } a \text{ et } \mathrm{Tr}(A) - (n-1)a.}$

7. (a) On attend une preuve du résultat du cours ici.
Attention qu'en toute rigueur E_1 et E_2 ne sont des sous espaces propres que si ils ne sont pas réduits à $\{0\}$.
Montrons d'abord que $\lambda_1 \neq \lambda_2$:
on a $\lambda_2 - \lambda_1 = \mathrm{Tr}(A) - (n-1)a - a = \mathrm{Tr}(A) - na = k = \mathrm{Tr}(UV^\top)$
Or $\mathrm{Tr}(UV^\top) \neq 0$ et donc $\lambda_1 \neq \lambda_2$.
Soit $X \in E_1 \cap E_2$, on a donc $AX = \lambda_1 X$ et $AX = \lambda_2 X$, par soustraction, on obtient $(\lambda_1 - \lambda_2)X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ et, comme $\lambda_1 \neq \lambda_2$, on en déduit que $X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.
Ainsi $E_1 \cap E_2 \subset \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$ et l'inclusion réciproque est vraie car E_1 et E_2 sont deux sous espaces vectoriels donc ils contiennent $0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Finalement $\boxed{E_1 \cap E_2 = \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}}$

(b)
- Analyse :
Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $X = X_1 + X_2$ avec $X_1 \in E_1$ et $X_2 \in E_2$ alors $AX_1 = \lambda_1 X_1$ et $AX_2 = \lambda_2 X_2$, d'où
$$AX = AX_1 + AX_2 = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$$
il en découle que $AX - \lambda_2 X = (\lambda_1 - \lambda_2)X_1$ et comme $\lambda_1 \neq \lambda_2$, on déduit
$$X_1 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(AX - \lambda_2 X)$$
puis
$$X_2 = X - X_1 = X - \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(AX - \lambda_2 X) \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}((\lambda_1 - \lambda_2)X - AX + \lambda_2 X) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(\lambda_1 X - AX)$$

- Synthèse :
Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pose
$$X_1 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(AX - \lambda_2 X) \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(\lambda_1 X - AX)$$
D'après le calcul précédent on a $X_1 + X_2 = X$.
D'autre part $AX_1 = \dfrac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(A^2X - \lambda_2 AX\right)$ et, $A^2 = \alpha A + \beta I_n$ donc $A^2X = \alpha AX + \beta X$.

Ainsi, en utilisant les relations coefficients racines : $\alpha = \lambda_1 + \lambda_2$ et $\beta = -\lambda_1\lambda_2$ on obtient

$$\begin{aligned}
AX_1 &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(\alpha AX + \beta X - \lambda_2 AX\right)\\
&= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left((\alpha - \lambda_2)AX + \beta X\right)\\
&= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(\lambda_1 AX + \beta X\right)\\
&= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(\lambda_1 AX - \lambda_1\lambda_2 X\right)\\
&= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(AX - \lambda_2 X\right)\\
&= \lambda_1 X_1
\end{aligned}$$

Ainsi $X_1 \in E_1$.
On montre mutatis mutandis que $X_2 \in E_2$.
Ainsi $\boxed{\text{pour tout } X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \text{ il existe } X_1 \in E_1 \text{ et } X_2 \in E_2 \text{ tels que } X = X_1 + X_2.}$

(c) À la question 7.(a), nous avons établi que E_1 et E_2 sont en somme directe et à la question 7.(b), nous avons montré que $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = E_1 + E_2$.

Ainsi $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = E_1 \oplus E_2$.

$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est somme directe de sous espaces propres de A donc $\boxed{A \text{ est diagonalisable.}}$

8. On a $\mathrm{Tr}(A) = 3$, on cherche U, V et a, avec $\mathrm{Tr}(A) = na + k = 3a + k$ et les valeurs propres de A ne peuvent être que a et $\mathrm{Tr}(A) - (n-1)a = 3 - 2a$.

D'après la partie 1, la seule valeur possible est donc $a = 2$ d'où $k = -3$.

On cherche alors U et V tels que $UV^\top = A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

D'autre part $UV^\top$ a pour colonnes v_1U, v_2U et v_3U.
On prend alors

$$\boxed{U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad V = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

et donc $\boxed{a = 2}$.

1. (a) Comme $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\{X > n\} = \bigcup_{k=n+1}^{+\infty} \{X = k\}$.

   Les événements considérés dans l'union sont **incompatibles** donc

$$\mathbb{P}(X > n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=n}^{+\infty} p\,(1-p)^k = p\,(1-p)^n \,\frac{1}{1-(1-p)} = (1-p)^n$$

   Finalement

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \mathbb{P}(X > n) = (1-p)^n}$$

   (b) Par convention $\inf(\emptyset) = +\infty$ donc, lorsque toutes les variables X_k valent 0, on posera $T = \infty$.
   On a $T(\Omega) = \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$.
   Pour $k \in \mathbb{N}^\star$ on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T = k) &= \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \{X_i = 0\}\right) \cap \{X_k = 1\}\right) \\
&= \left(\prod_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}(X_i = 0)\right) \times \mathbb{P}(X_n = 1) \quad \textit{par indépendances des variables aléatoires } X_1, \cdots, X_n \\
&= \left(\prod_{i=1}^{k-1} (1-p)\right) \times p \\
&= p(1-p)^{k-1}
\end{aligned}$$

   D'autre part, $\mathbb{P}(T \in \mathbb{N}^*) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T = k) = 1$

   On en déduit que $\mathbb{P}(T = +\infty) = 1 - \mathbb{P}(T \in \mathbb{N}^*) = 0$. On peut donc considérer que $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et donc que $\boxed{T \text{ suit la même loi que } X}$.

2. (a) Soit $n \geqslant 2$, la famille $(\{X = k\})_{k \in \mathbb{N}^*}$ forme un système complet d'événement, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X + Y = n) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k, X + Y = n) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k, Y = n - k)
\end{aligned}$$

   Or $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ donc $\{Y = n - k\} = \emptyset$ si $k \geqslant n$, ainsi

$$\boxed{\mathbb{P}(X + Y = n) = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(X = k, Y = n - k)}$$

   (b) On a $(X + Y)(\Omega) \subset \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.
   Pour $n \geqslant 2$, on a, d'après la question a. :

$$\mathbb{P}(X + Y = n) = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(X = k, Y = n - k)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=n-k) \quad \textit{par indépendance de } X \textit{ et } Y \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} pq^{k-1}pq^{n-k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} p^2q^{n-2} \\
&= (n-1)p^2q^{n-2}
\end{aligned}
$$

Ainsi

$$\boxed{\forall n \geqslant 2, \qquad \mathbb{P}(X+Y=n) = (n-1)p^2q^{n-2}}$$

(c) Soit $n \geqslant 2$ fixé et soit $m \in \mathbb{N}$, on a

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=m|X+Y=n) &= \frac{\mathbb{P}(X+Y=n, X=m)}{\mathbb{P}(X+Y=n)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(X+Y=n, Y=m)}{(n-1)p^2q^{n-2}} \\
&= \frac{\mathbb{P}(X=n-m, Y=m)}{(n-1)p^2q^{n-2}} \\
&= \frac{\mathbb{P}(X=n-m)\mathbb{P}(Y=m)}{(n-1)p^2q^{n-2}} \quad \textit{par indépendance de } X \textit{ et } Y \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } n-m \leqslant 0 \\ \dfrac{pq^{n-m-1}pq^{m-1}}{(n-1)p^2q^{n-2}} & \text{si } n-m \geqslant 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } m \geqslant n \\ \dfrac{1}{n-1} & \text{si } m \leqslant n-1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Ainsi, conditionnellement à l'évènement $(X+Y=n)$, X suit une $\boxed{\text{loi uniforme sur } [\![1, n-1]\!]}$

3. (a) D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([X=k])_{k\in\mathbb{N}^*}$, on a

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=Y) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=Y, X=k) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k, y=k) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=k) \quad \textit{par indépendance de } X \textit{ et } Y \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} pq^{k-1}pq^{k-1} \\
&= p^2\sum_{k=1}^{+\infty} (q^2)^{k-1} \quad \textit{on reconnait une série géométrique de raison } q^2 \\
&= \frac{p^2}{1-q^2} \\
&= \frac{p^2}{(1-q)(1+q)} \\
&= \frac{p}{1+q}
\end{aligned}
$$

Ainsi $\boxed{\mathbb{P}(X=Y)=\dfrac{p}{1+q}}$.

(b) i. L'univers image de Z est $Z(\Omega)=\mathbb{N}^\star$.
Pour $n\geqslant 1$, on a :

$$\boxed{\mathbb{P}(Z=n)=\mathbb{P}([Z>n-1]\setminus[Z>n])=\mathbb{P}(Z>n-1)-\mathbb{P}(Z>n)}$$

ii. Pour $n\in\mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z>n)&=\mathbb{P}([X>n]\cap[Y>n])\\&=\mathbb{P}(X>n)\times\mathbb{P}(Y>n)\quad \textit{par indépendance de } X \textit{ et } Y \quad =(1-p)^n\times(1-p)^n\\&=q^{2n}\end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\qquad \mathbb{P}(Z>n)=q^{2n}}$$

iii. Ainsi, pour $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z=n)&=\mathbb{P}(Z>n-1)-\mathbb{P}(Z>n)\\&=q^{2(n-1)}-q^{2n}\\&=(q^2)^{n-1}(1-q^2)\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{Z \text{ suit une loi géométrique de paramètre } 1-q^2>0.}$

(c) On sait que $T=\max(X,Y)$, nous en déduisons que l'univers image de T est $T(\Omega)=\mathbb{N}^\star$.
Pour $n\geqslant 1$, on a l'égalité $[T\leqslant n]=[X\leqslant n]\cap[Y\leqslant n]$.

Ainsi, par indépendance de X et Y,

$$\mathbb{P}(T\leqslant n)=\mathbb{P}(X\leqslant n)\mathbb{P}(Y\leqslant n)=(1-\mathbb{P}(X>n)(1-\mathbb{P}(Y>n))=(1-q^n)^2$$

Remarquons que la formule est encore valable pour $n=0$.

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on a alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T=n)&=\mathbb{P}(T\leqslant n)-\mathbb{P}(T\leqslant n-1)\\&=(1-q^n)^2-(1-q^{n-1})^2\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{T(\Omega)=\mathbb{N}^*}$ et

$$\boxed{\forall n\geqslant 1,\qquad \mathbb{P}(T=n)=(1-q^n)^2-(1-q^{n-1})^2}$$